مفاهيم الرياضيات البحتة

الجبر والهندسة التحليلية الفراغية

الصف الثالث الثانوى

أولا : الجبـــــــــر

الوحدة الاولي : التباديل و التوافيق ونظرية ذات الحدين

(١) $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)\,........\,(\text{ن}-\text{ر}+١)$ لكل ر $\leqslant$ ن ، ر ، ن $\in$ ص$^{+}$

(٢) $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \dfrac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{ر})!}$

(٣) $١! = ٠! = ١$

(٤) $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \dfrac{^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\text{ر}!} = \dfrac{\text{ن}!}{\text{ر}!\,(\text{ن}-\text{ر})!}$

(٥) $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}} = {^{\text{ن}}\text{ق}_{٠}} = ١$

(٦) $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-\text{ر}}}$

(٧) إذا كان $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{س}} = {^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ص}}}$ فإن س = ص أ، س + ص = ن

(٨) $\dfrac{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}} = \dfrac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}}$

(٩) $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} + {^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}} = {^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}}}$

(١٠) $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} + {^{\text{ن}}\text{ق}_{١}}\,\text{س}^{\text{ن}-١}\,\text{أ} + {^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}}\,\text{س}^{\text{ن}-٢}\,\text{أ}^{٢} + \,..........\, + \text{أ}^{\text{ن}}$

$(\text{س}-\text{أ})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} - {^{\text{ن}}\text{ق}_{١}}\,\text{س}^{\text{ن}-١}\,\text{أ} + {^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}}\,\text{س}^{\text{ن}-٢}\,\text{أ}^{٢} - \,..........\, + (-\text{أ})^{\text{ن}}$

(١١) $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}} + (\text{س}-\text{أ})^{\text{ن}} = ٢$ [مجموع الحدود الفردية الرتبة من حدود $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}}$]

(١٢) $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}} - (\text{س}-\text{أ})^{\text{ن}} = ٢$ [مجموع الحدود الزوجية الرتبة من حدود $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}}$]

(١٣) $(١\pm\text{س})^{\text{ن}} = ١ \pm {^{\text{ن}}\text{ق}_{١}}\,\text{س} + {^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}}\,\text{س}^{٢} \pm {^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}}\,\text{س}^{٣} + \,........\, (\pm\text{س})^{\text{ن}}$

(١٤) الحد العام في مفكوك $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}}$ هو $\text{ح}_{\text{ر}+١} = {^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}\,\text{س}^{\text{ن}-\text{ر}}\,\text{أ}^{\text{ر}}$

الحد الأوسط في مفكوك $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}}$

- إذا كانت ن فردية يوجد حدان أوسطان رتبتاهما : $\dfrac{\text{ن}+١}{٢}$ ، $\dfrac{\text{ن}+٣}{٢}$
- إذا كانت ن زوجية يوجد حد أوسط وحيد رتبته : $\dfrac{\text{ن}+٢}{٢}$

(١٥) النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}} = \dfrac{\text{ع}_{\text{ر}+1}}{\text{ع}_{\text{ر}}} = \dfrac{\text{ن} - \text{ر} + 1}{\text{ر}} \times \dfrac{\text{أ}}{\text{س}}$

(١٦) النسبة بين معاملي حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$

$$= \dfrac{\text{ن} - \text{ر} + 1}{\text{ر}} \times \dfrac{\text{معامل الثاني}}{\text{معامل الاول}}$$

الوحدة الثانية : الأعداد المركبة

العدد المركب : لكل س ، ص ∈ ح فإن العدد ع = س + ص ت يسمي عدداً مركباً الجزء الحقيقي له هو س ، و الجزء التخيلي له هو ص حيث $\text{ت}^2 = -1$

مرافق العدد المركب : إذا كان ع = س + ص ت عدداً مركباً فإن مرافقه هو $\overline{\text{ع}}$ = س − ص ت

و يكون $\text{ع} + \overline{\text{ع}}$ = عدداً حقيقيا ، $\text{ع}\ \overline{\text{ع}}$ = عدداً حقيقيا

خواص المرافق : (١) $\overline{(\text{ع}_1 + \text{ع}_2)} = \overline{\text{ع}_1} + \overline{\text{ع}_2}$

(٢) $\overline{(\text{ع}_1\ \text{ع}_2)} = (\overline{\text{ع}_1})(\overline{\text{ع}_2})$

(٣) $\overline{\left(\dfrac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}\right)} = \dfrac{\overline{\text{ع}_1}}{\overline{\text{ع}_2}}$

التمثيل الهندسي للعدد المركب : العدد المركب ع = س + ص ت تمثله النقطة (س ، ص) في المستوي الاحداثي لأرجاند

المقياس و السعة للعدد المركب : إذا كانت النقطة (س ، ص) تمثل العدد المركب ع على مستوي أرجاند فإن $|\text{ع}| = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$ ، سعة ع تتعين من العلاقتين جتا $\theta = \dfrac{\text{س}}{\text{ل}}$ ، جا $\theta = \dfrac{\text{ص}}{\text{ل}}$

خواص المقياس و السعة للعدد المركب :

(١) $|\text{ع}| = |\overline{\text{ع}}|$ (٢) $\text{ع}\ \overline{\text{ع}} = |\text{ع}|^2 = |\overline{\text{ع}}|^2$

(٣) $|\text{ع}_1\ \text{ع}_2| = |\text{ع}_1|\ |\text{ع}_2|$

(٤) $\left|\dfrac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}\right| = \dfrac{|\text{ع}_1|}{|\text{ع}_2|}$

(٥) $|\text{ع}_1 + \text{ع}_2| \leqslant |\text{ع}_1| + |\text{ع}_2|$



(٦) سعة العدد المركب يمكن أن تأخذ عددا غير منته من القيم التي تختلف كل منها عن الأخرى بعدد صحيح من مضاعفات ٢ π

(٧) السعة التي تنتمي للفترة] $-\pi$ ، π] تسمى السعة الأساسية للعدد المركب

(٨) سعة $\bar{ع}$ = − سعة ع

(٩) سعة (− ع) = $-\pi$ + سعة ع

(١٠) سعة $\frac{١}{ع}$ = − سعة ع

الصورة المثلثية للعدد المركب : ع = ل (جتا θ + ت جا θ) حيث ع = | ل | ، θ السعة الأساسية

ضرب و قسمة الاعداد المركبة بالصورة المثلثية :

إذا كان : $ع_١ = ل_١$ (جتا $\theta_١$ + ت جا $\theta_١$) ، $ع_٢ = ل_٢$ (جتا $\theta_٢$ + ت جا $\theta_٢$)

فإن : $ع_١ ع_٢ = ل_١ ل_٢$ (جتا ($\theta_١ + \theta_٢$) + ت جا ($\theta_١ + \theta_٢$))

، $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢}$ (جتا ($\theta_١ - \theta_٢$) + ت جا ($\theta_١ - \theta_٢$))

الصورة الاسية للعدد المركب : (صورة أويلر) إذا كان ع عددا مركبا مقياسه ل ، و سعته الأساسية θ فإن :

ع = ل $هـ^{\theta ت}$ حيث θ بالتقدير الدائري

$هـ^{\theta ت}$ = جتا θ + ت جا θ ، $هـ^{-\theta ت}$ = جتا θ − ت جا θ = جتا($-\theta$) + ت جا ($-\theta$)

نظرية ديموافر : إذا كان ن عدداً صحيحا فإن :

(١) (جتا θ + ت جا θ)^{ن} = (جتا ن θ + ت جا ن θ)

(٢) إذا كان ك عددا موجبا فإن (جتا θ + ت جا θ)$^{\frac{١}{ك}}$ = (جتا $\frac{\theta + ٢ ر \pi}{ك}$ + ت جا $\frac{\theta + ٢ ر \pi}{ك}$)

أي أن مقدار (جتا θ + ت جا θ)$^{\frac{١}{ك}}$ يأخذ قيما متعددة تبعا لقيم ر و يكون عدد هذه القيم المختلفة يساوي ك من القيم التي نحصل عليها بوضع ر = ... ، −٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ..... التي تجعل السعة $\frac{\theta + ٢ ر \pi}{ك}$ محصورة بين $-\pi$ ، π

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح : إذا كان $ع^٣$ = ١ فإن ع ∈ { ١ ، $-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت }

و يرمز لهذه الجذور بالرموز ١ ، ω ، $\omega^٢$

حيث $\omega = -\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $\omega^٢ = -\frac{١}{٢} \mp \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

(١) $\omega^٣ = ١$ (٢) ١ + $\omega + \omega^٢$ = صفر (٣) $\omega^٢ - \omega = \pm \sqrt{٣}$ ت

الجذور النونية للواحد الصحيح : إذا كان $\text{ع}^{\text{ن}} = ١$

فإن $\text{ع} = (\text{جتا } ٠^{\circ} + \text{ت جا } ٠^{\circ})^{\frac{١}{\text{ن}}} = \text{جتا } \frac{٢\pi\text{ك}}{\text{ن}} + \text{ت جا } \frac{٢\pi\text{ك}}{\text{ن}}$ حيث $\text{ك} \in \text{ص}$ ، $\frac{٢\pi\text{ك}}{\text{ن}} \in [-\pi ، \pi[$

و تمثل الجذور النونية للواحد الصحيح على المستوي أرجاند برؤوس مضلع عدد رؤوسه ن ، و تقع على دائرة مركزها نقطة الأصل و طول نصف قطرها ١

الوحدة الثالثة : المحددات و المصفوفات

المحدد : المحدد من الرتبة ن يتكون من ن من الصفوف ، ن من الأعمدة و ينشأ من حذف (ن – ١) من المتغيرات في ن من المعادلات الخطية .

خواص المحددات :

- لا تتغير قيمة المحدد إذا تبدلت الصفوف بالأعمدة و الأعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها
- قيمة المحدد لا تتغير بفكه عن طريق عناصر أي صف (عمود)
- إذا وجد عامل مشترك في جميع عناصر صف (عمود) في محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد
- قيمة المحدد تساوي صفر في الحالات الأتية :
  - إذا كانت جميع عناصر أي صف أو (أي عمود) في محدد تساوي صفر فإن قيمة المحدد = صفر
  - إذا تساوت العناصر المتناظرة في أي صفين (أو عمودين) في محدد فإن قيمة المحدد = صفر
- إذا بدلنا موضعي صفين (عمودين) فإن قيمة المحدد الناتج = – ١ × قيمة المحدد الأصلي
- إذا كتبت جميع عناصر أي صف (عمود) كمجموع عنصرين فإنه يمكن كتابة المحدد الأصلي على صورة مجموع محددين
- إذا أضفنا لعناصر أي صف (عمود) العناصر المناظرة لها من صف (عمود) أخر مضروبة في عدد مثل م فإن قيمة المحدد لا تتغير
- قيمة المحدد على الصورة المثلثة تساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي
- في أي محدد إذا ضربنا عناصر أي صف (عمود) في العوامل المرافقة للعناصر المناظرة في أي صف (عمود) أخر ثم جمعنا نواتج الضرب فإن الناتج يكون مساوياً صفرا

لإيجاد معكوس المصفوفة المربعة : من النظم ٣ × ٣ باستخدام مصفوفة العوامل المرافقة نتبع الخطوات التالية :

- نوجد محدد المصفوفة أ مع ملاحظة أن | أ | ≠ صفر
- نكون مصفوفة العوامل المرافقة لكل عنصر من عناصر المصفوفة أ
- نوجد المصفوفة الملحقة $\text{أ}^{\text{مل}}$ لمصفوفة العوامل المرافقة
- نوجد المعكوس الضربي للمصفوفة أ من العلاقة : $\text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}}$

حل أنظمة المعادلات الخطية :

باعتبار أن أ هي مصفوفة المعاملات ، س هي مصفوفة المتغيرات

ب هي مصفوفة الثوابت . فإن :

- المعادلة المصفوفية تكتب بالصورة : أ س = ب
- وحل هذه المعادلة هو : $\text{س} = \text{أ}^{-١} \times \text{ب}$



مرتبة المصفوفة :

مرتبة المصفوفة غير الصفرية هي أعلى درجة لمحدد أو محدد أصغر للمصفوفة قيمته لا تساوي الصفر ، فإذا كانت المصفوفة أ غير الصفرية على النظم م × ن فإن مرتبة المصفوفة (أ) نرمز لها بالرمز ر (أ) حيث :

١ ≤ ر (أ) ≤ أصغر (م ، ن)

المصفوفة الموسعة : هي مصفوفة ممتدة للنظام الخطي و يرمز لها بالرمز أ* حيث :

أ* = (أ | ب) و هي على النظم م × (ن + ١)

المعادلات غير المتجانسة :

تسمى مجموعة المعادلات التي على صورة معادلة المصفوفة : أ س = ب غير متجانسة حيث ب ≠ □

- يكون للمجموعة المكونة من ن معادلة غير متجانسة في ن مجهولا حل وحيد إذا كانت
  ر (أ) = ر (أ*) = ن (عدد المجاهيل) حيث | أ | ≠ صفر
- يكون لمجموعة المعادلات عدد غير محدود من الحلول " عدد لا نهائي "
  إذا كان ر (أ) = ر (أ*) = ك حيث ك < ن
- و لا يكون لها حل على الاطلاق إذا كان ر (أ) ≠ ر (أ*)

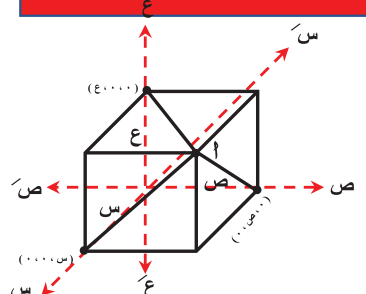
المعادلات المتجانسة :

تسمى مجموعة المعادلات التي على الصورة : أ س = □ بالمعادلات المتجانسة فإذا كان :

- ر (أ) = ر (أ*) = ن (عدد المجاهيل) يكون للنظام حل وحيد هو الحل الصفري (و يسمى بالحل البديهي لكونه شديد الوضوح)
- ر (أ) < ن (حيث ن عدد المجاهيل) ، | أ | = صفر فإنه يوجد حل للمجموعة عدد لانهائي من الحلول بخلاف الحل الصفري

ثانيا : الهندسة الفراغية

الوحدة الاولي : الهندسة و القياس في ثلاثة أبعاد



النظام الاحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد :

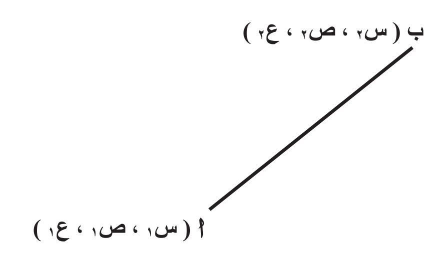
تتعين إحداثيات النقطة أ في الفراغ بمعرفة مسقطها على كل محور من محاور الإحداثيات

قاعدة اليد اليمنى :

و فيها تشير الأصابع المنحنية من الاتجاه الموجب لمحور س إلي الاتجاه الموجب لمحور ص و يشير اتجاه الإبهام إلي الاتجاه الموجب لمحور ع

مستويات الاحداثيات :

- المستوى س ص و معادلته ع = صفر
- المستوى س ع و معادلته ص = صفر
- المستوى ص ع و معادلته س = صفر



البعد بين نقطتين فى الفراغ :

إذا كانت أ ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) ، ب ($س_2$ ، $ص_2$ ، $ع_2$)

نقطتين في الفراغ فإن طول القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ يعطى بالعلاقة :

$$أب = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2 + (ع_2 - ع_1)^2}$$

إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة :

إذا كانت أ ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) ، ب ($س_2$ ، $ص_2$ ، $ع_2$)

نقطتين في الفراغ ، جـ نقطة منتصف $\overline{أب}$ فإن احداثيات النقطة جـ هي :

فإن جـ $\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} ، \frac{ع_1 + ع_2}{2} \right)$

معادلة الكرة فى الفراغ :

- معادلة الكرة التي مركزها (ل ، ك ، ن) ، و طول نصف قطرها نق تكون :

$$(س - ل)^2 + (ص - ك)^2 + (ع - ن)^2 = نق^2$$

- معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل ، و طول نصف قطرها نق تكون : $س^2 + ص^2 + ع^2 = نق^2$
- معادلة الكرة : $س^2 + ص^2 + ع^2 + 2 ل س + 2 ك ص + 2 ن ع + ء = 0$

حيث مركزها (– ل ، – ك ، – ن) ، و طول نصف قطرها (نق) = $\sqrt{ل^2 + ك^2 + ن^2 - ء}$

حيث $ل^2 + ك^2 + ن^2 > ء$

متجه الموضع فى الفراغ :

إذا كانت أ ($أ_س$ ، $أ_ص$ ، $أ_ع$) نقطة في الفراغ فإن متجه الموضع

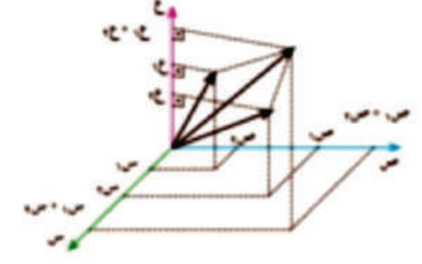
للنقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل يكون $\vec{أ}$ = ($أ_س$ ، $أ_ص$ ، $أ_ع$)

- $أ_س$ تسمي مركبة المتجه $\vec{أ}$ في اتجاه محور س
- $أ_ص$ تسمي مركبة المتجه $\vec{أ}$ في اتجاه محور ص
- $أ_ع$ تسمي مركبة المتجه $\vec{أ}$ في اتجاه محور ع

معيار المتجه :

إذا كان $\vec{أ}$ = ($أ_س$ ، $أ_ص$ ، $أ_ع$) فإن $\|\vec{أ}\| = \sqrt{أ_س^2 + أ_ص^2 + أ_ع^2}$

جمع و طرح المتجهات فى الفراغ :





إذا كان $\vec{أ}$ = ($أ_س$ ، $أ_ص$ ، $أ_ع$) ، $\vec{ب}$ = ($ب_س$ ، $ب_ص$ ، $ب_ع$) فإن :

- $\vec{أ} + \vec{ب}$ = ($أ_س + ب_س$ ، $أ_ص + ب_ص$ ، $أ_ع + ب_ع$)
- $\vec{أ} - \vec{ب}$ = ($أ_س - ب_س$ ، $أ_ص - ب_ص$ ، $أ_ع - ب_ع$)

خواص عملية الجمع :

(١) $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} \in \text{ع}^3$ خاصية الانغلاق (٢) $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}}$ خاصية الابدال

(٣) $(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) + \overrightarrow{\text{جـ}} = \overrightarrow{\text{أ}} + (\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}})$ خاصية التجميع

(٤) $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{و}} = \overrightarrow{\text{و}} + \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{أ}}$ العنصر المحايد الجمعي

(٥) $\overrightarrow{\text{أ}} + (-\overrightarrow{\text{أ}}) = (-\overrightarrow{\text{أ}}) + \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ المعكوس الجمعي

ضرب المتجه فى عدد حقيقى :

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ ، ك $\in$ ع فإن ك $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{ك أ}_{\text{س}} ، \text{ك أ}_{\text{ص}} ، \text{ك أ}_{\text{ع}})$

تساوى المتجهات فى الفراغ :

إذا كان $(\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}}) = (\text{ب}_{\text{س}} ، \text{ب}_{\text{ص}} ، \text{ب}_{\text{ع}})$

فإن : $\text{أ}_{\text{س}} = \text{ب}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}} = \text{ب}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}} = \text{ب}_{\text{ع}}$

متجه الوحدة :

هو متجه معياره يساوى وحدة الأطوال

متجهات الوحدة الاساسية :

- $\overrightarrow{\text{س}} = (١ ، ٠ ، ٠)$ متجه وحدة في الاتجاه الموجب لمحور س
- $\overrightarrow{\text{ص}} = (٠ ، ١ ، ٠)$ متجه وحدة في الاتجاه الموجب لمحور ص
- $\overrightarrow{\text{ع}} = (٠ ، ٠ ، ١)$ متجه وحدة في الاتجاه الموجب لمحور ع

التعبير عن متجه بدلالة متجهات الوحدة الاساسية :

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ فإنه يمكن كتابة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ على الصورة : $\overrightarrow{\text{أ}} = \text{أ}_{\text{س}} \overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}} \overrightarrow{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}} \overrightarrow{\text{ع}}$

التعبير عن قطعة مستقيمة فى الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها :

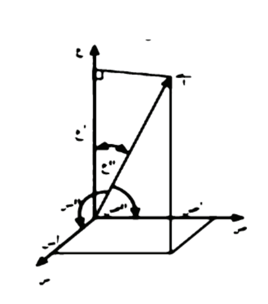
إذا كان أ ، ب نقطتين في الفراغ متجه موضعهما $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

على الترتيب فإن $\overrightarrow{\text{أ ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$

متجه الوحدة فى اتجاه معلوم :

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ فإن متجه $\overrightarrow{\text{ى}_{\text{أ}}}$ يسمى متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{\text{أ}}$ و يعطى بالعلاقة :

$$\overrightarrow{\text{ى}_{\text{أ}}} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|}$$



زوايا الاتجاه و جيوب تمام الاتجاه المتجه فى الفراغ :

إذا كانت $(\theta_{\text{س}} ، \theta_{\text{ص}} ، \theta_{\text{ع}})$ قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$

مع الاتجاهات الموجبة لمحاور س ، ص ، ع على الترتيب فإن :

- أ$_{س}$ = || أ || جتا $\theta_{س}$ ، أ$_{ص}$ = || أ || جتا $\theta_{ص}$ ، أ$_{ع}$ = || أ || جتا $\theta_{ع}$

($\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$) تسمي بزوايا الاتجاه للمتجه أ

- جتا $\theta_{س}$ ، جتا $\theta_{ص}$ ، جتا $\theta_{ع}$ تسمي جيوب تمام الاتجاه للمتجه أ
- جتا $\theta_{س}$ سَ + جتا $\theta_{ص}$ صَ + جتا $\theta_{ع}$ عَ تمثل متجه الوحدة في اتجاه المتجه أ
- و يكون : جتا^{2} $\theta_{س}$ + جتا^{2} $\theta_{ص}$ + جتا^{2} $\theta_{ع}$ = ١

الضرب القياسى لمتجهين :

إذا كان أ ، ب متجهين في ع^{3} قياس الزاوية بينهما θ حيث ٠ ⩽ θ ⩽ ١٨٠° فإن :

أ • ب = || أ || || ب || جتا θ

خواص الضرب القياسى لمتجهين :

(١) أ • ب = ب • أ خاصية الابدال

(٢) أ • (ب + جـ) = أ • ب + أ • جـ خاصية التوزيع

(٣) إذا كان ك عدد حقيقي فإن (ك أ) • ب = أ • (ك ب) = ك (أ • ب)

(٤) أ • أ = || أ ||^{2}

(٥) إذا كان أ • ب = صفر فإن أ ⊥ ب حيث أ ، ب متجهين غير صفريين

الضرب القياسى لمتجهين فى نظام احداثي متعامد :

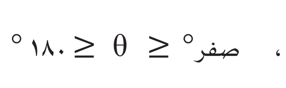
إذا كان أ = (أ$_{س}$ ، أ$_{ص}$ ، أ$_{ع}$) ، ب = (ب$_{س}$ ، ب$_{ص}$ ، ب$_{ع}$)

فإن : أ . ب = أ$_{س}$ ب$_{س}$ + أ$_{ص}$ ب$_{ص}$ + أ$_{ع}$ ب$_{ع}$

الزاوية بين متجهين :

∴ جتا θ = $\frac{\text{أ • ب}}{\text{|| أ || || ب ||}}$ ، صفر° ≤ θ ≤ ١٨٠°





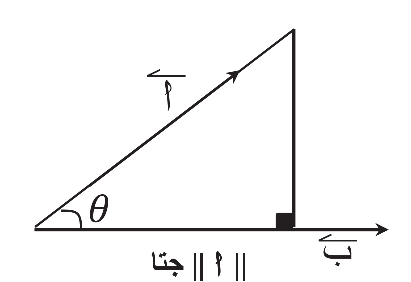
- إذا كانت جتا θ = ١ فإن أ // ب و نفس الاتجاه
- إذا كانت جتا θ = − ١ فإن أ // ب و في عكس الاتجاه
- إذا كانت جتا θ = صفر فإن أ ⊥ ب

مركبة متجه فى اتجاه متجه أخر :

∴ مركبة المتجه أ في اتجاه ب

أ$_{ب}$ = || أ || جتا θ

أ$_{ب}$ = $\frac{\text{أ • ب}}{\text{|| ب ||}}$

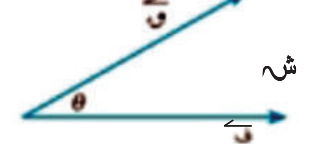




المركبة الاتجاهية للمتجه $\overleftarrow{أ}$ في اتجاه $\overleftarrow{ب}$:

$$= \left(\frac{\overleftarrow{أ} \cdot \overleftarrow{ب}}{\|\overleftarrow{ب}\|^{٢}} \right) \overleftarrow{ب}$$

الشغل المبذول من قوة $\overleftarrow{ق}$ لإحداث إزاحة $\overleftarrow{ف}$:



إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ على جسم ما فحركته إزاحة $\overleftarrow{ف}$ فإننا نقول أن القوة $\overleftarrow{ق}$ قد بذلت شغلا ش

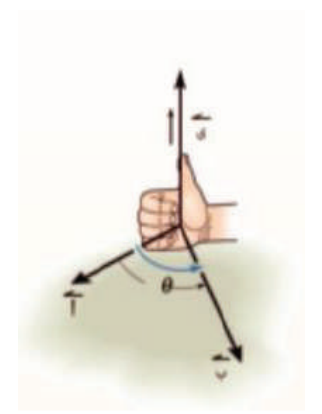
الشغل $= \overleftarrow{ق} \cdot \overleftarrow{ف}$

$= \|\overleftarrow{ق}\| \, \|\overleftarrow{ف}\|$ جتا θ

- إذا كانت القوة $\overleftarrow{ق}$ في نفس اتجاه الازاحة (θ = صفر°) ش $= \|\overleftarrow{ق}\| \, \|\overleftarrow{ف}\|$
- إذا كانت القوة $\overleftarrow{ق}$ في عكس اتجاه الازاحة ($\theta = ١٨٠°$) ش $= - \|\overleftarrow{ق}\| \, \|\overleftarrow{ف}\|$
- إذا كانت القوة $\overleftarrow{ق}$ عمودية على اتجاه الازاحة ($\theta = ٩٠°$) ش = صفر



الضرب الاتجاهي لمتجهين:



إذا كان $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين في ع^{٣} ، قياس الزاوية بينهما يساوي θ

فإن $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = (\|\overleftarrow{أ}\| \, \|\overleftarrow{ب}\|$ جا $\theta) \, \overleftarrow{ى}$ حيث $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة عمودي

على مستوى $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، ويتحدد اتجاه متجه الوحدة $\overleftarrow{ى}$ (لأعلى أم لأسفل)

طبقا لقاعدة اليد اليمنى حيث يشير الأصابع المنحنية لليد اليمنى إلي اتجاه

الدوران من $\overleftarrow{أ}$ إلي المتجه $\overleftarrow{ب}$ فيشير الابهام إلي المتجه $\overleftarrow{ى}$

خواص الضرب الاتجاهي لمتجهين :

(١) $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = - \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ}$

(٢) $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{أ} = \overleftarrow{و}$

(٣) $\overleftarrow{أ} \times (\overleftarrow{ب} + \overleftarrow{جـ}) = \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} + \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{جـ}$ خاصية التوزيع

(٤) إذا كان $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{و}$ فإما $\overleftarrow{أ} // \overleftarrow{ب}$ أو أحد المتجهين أو كليهما يساوي $\overleftarrow{و}$

(٥) $\overleftarrow{س} \times \overleftarrow{ص} = \overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{ع} = \overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ع} \times \overleftarrow{س} = \overleftarrow{ص}$

$\overleftarrow{س} \times \overleftarrow{ع} = - \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ع} \times \overleftarrow{ص} = - \overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{س} = - \overleftarrow{ع}$

الضرب الاتجاهي لمتجهين في نظام احداثي متعامد :

إذا كان $\overleftarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overleftarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$

$$\text{فإن : } \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \end{vmatrix}$$

حالة خاصة : الضرب الاتجاهي في مستوى الاحداثيات س ص :

إذا كان $\overleftarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص)$ ، $\overleftarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص)$

$$\text{فإن : } \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \begin{vmatrix} أ_س & أ_ص \\ ب_س & ب_ص \end{vmatrix} \overleftarrow{ع} = (أ_س ب_ص - أ_ص ب_س)\, \overleftarrow{ع}$$

متجه الوحدة العمودي على مستوى المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$:

$$\overleftarrow{ى} = \frac{\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}}{\| \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} \|}$$

توازي متجهين :

المتجهان $\overleftarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overleftarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ يكونان متوازيين إذا تحقق أحد الشروط الاتية :

(١) $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{و}$

(٢) $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$

(٣) $\overleftarrow{أ} = ك\, \overleftarrow{ب}$ إذا كانت $ك > ٠$ فإن المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متوازيان و في نفس الاتجاه

، إذا كانت $ك < ٠$ فإن المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متوازيان و في عكس الاتجاه

المعنى الهندسي للضرب الاتجاهي :

$\| \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} \|$ = مساحة متوازي الاضلاع الذي فيه $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ضلعان متجاوران

= ضعف مساحة المثلث الذي فيه $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ضلعان متجاوران

الضرب الثلاثي القياسي :

$$\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{جـ} = \begin{vmatrix} أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \\ جـ_س & جـ_ص & جـ_ع \end{vmatrix}$$

المعنى الهندسي للضرب الثلاثي القياسي :

حجم متوازي السطوح الذي فيه $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{جـ}$ ثلاثة متجهات تمثل أحرف غير متوازية

يساوي القيمة المطلقة للمقدار : $\overleftarrow{أ} . \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{جـ}$

الوحدة الثانية : الخطوط المستقيمة و المستويات في الفراغ

متجه الاتجاه :

- إذا كانت ل ، م ، ن هي جيوب تمام الاتجاه لمستقيم فإن المتجه $\overrightarrow{ه}$ = ك (ل ، م ، ن) يمثل متجه اتجاه للمستقيم و يرمز له بالرمز $\overrightarrow{ه}$ = (أ ، ب ، جـ) و تسمى الأعداد أ ، ب ، جـ بنسب الاتجاه للمستقيم
- متجه الاتجاه للمستقيم يأخذ عدة صور متكافئة فمثلا :

$\overrightarrow{ه}$ = ٢ (ل ، م ، ن) = ٣ (ل ، م ، ن) = – ٤ (ل ، م ، ن) =..............

معادلة الخط المستقيم :

- معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) و المتجه $\overrightarrow{ه}$ = (أ ، ب ، جـ) متجه اتجاه له هي

الصورة المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ = ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) + ك (أ ، ب ، جـ)

- المعادلات البارمترية : س = $س_1$ + ك أ ، ص = $ص_1$ + ك ب ، ع = $ع_1$ + ك جـ
- المعادلة الاحداثية : $\frac{س - س_1}{أ} = \frac{ص - ص_1}{ب} = \frac{ع - ع_1}{جـ}$

الزاوية بين مستقيمين :

إذا كان $\overrightarrow{ه}_1$ ، $\overrightarrow{ه}_2$ متجهي اتجاه مستقيمين فإن قياس الزاوية الصغرى بين المستقيمين يعطي بالعلاقة :

$$جتا\,\theta = \frac{|\overrightarrow{ه}_1 \cdot \overrightarrow{ه}_2|}{\|\overrightarrow{ه}_1\| \, \|\overrightarrow{ه}_2\|}$$

و إذا كان ($ل_1$ ، $م_1$ ، $ن_1$) ، ($ل_2$ ، $م_2$ ، $ن_2$) هي جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين فإن :

$$جتا\,\theta = |\,ل_1 ل_2 + م_1 م_2 + ن_1 ن_2\,|$$

شرط توازي و شرط تعامد مستقيمين :

إذا كان $\overrightarrow{ه}_1$ = ($أ_1$ ، $ب_1$ ، $جـ_1$) ، $\overrightarrow{ه}_2$ = ($أ_2$ ، $ب_2$ ، $جـ_2$) متجهي اتجاه مستقيمين فإن :

- المستقيمين متوازيان إذا كان :

$\overrightarrow{ه}_1 = ك\,\overrightarrow{ه}_2$ أ، $\overrightarrow{ه}_1 \times \overrightarrow{ه}_2 = \overrightarrow{و}$ أ، $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{جـ_1}{جـ_2}$

- المستقيمين متعامدان إذا كان :

$أ_1 أ_2 + ب_1 ب_2 + جـ_1 جـ_2$ = صفر

معادلة المستوى :

معادلة المستوي المار بالنقطة ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) و المتجه $\overrightarrow{ن}$ = (أ ، ب ، جـ) عموديا على المستوي هي :

- الصورة المتجهة : $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot$ ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$)
- الصورة القياسية : أ (س – $س_1$) + ب (ص – $ص_1$) + جـ (ع – $ع_1$) = صفر
- الصورة العامة : أ س + ب ص + جـ ع + ى = صفر ، حيث ى = -أ $س_1$ - ب $ص_1$ - جـ $ع_1$

الزاوية بين مستويين :

إذا كان $\overleftarrow{ن_١} = (أ_١ ، ب_١ ، جـ_١)$ ، $\overleftarrow{ن_٢} = (أ_٢ ، ب_٢ ، جـ_٢)$ متجهي العمودين على المستويين فإن قياس

الزاوية بين المستويين تعطي بالعلاقة :

$$جتا\theta = \frac{| \overleftarrow{ن_١} . \overleftarrow{ن_٢} |}{\| \overleftarrow{ن_١} \| \| \overleftarrow{ن_٢} \|} \quad حيث \quad ٠^\circ \leqslant \theta \leqslant ٩٠^\circ$$

المستويان المتوازيان و المستويان المتعامدان :

إذا كان $\overleftarrow{ن_١}$ ، $\overleftarrow{ن_٢}$ هما المتجهان العموديان على المستويين فإن :

- شرط توازي المستويين هو : $\overleftarrow{ن_١} // \overleftarrow{ن_٢}$ أ، $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$
- شرط تعامد المستويين هو : $\overleftarrow{ن_١} . \overleftarrow{ن_٢} = ٠$ أ، $أ_١ أ_٢ + ب_١ ب_٢ + جـ_١ جـ_٢ = صفر$

طول العمود المرسوم من نقطة على المستوي :

طول العمود المرسوم من النقطة أ $(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ على المستوي المار بالنقطة ب $(س_٢ ، ص_٢ ، ع_٢)$

و المتجه $\overleftarrow{ن} = (أ ، ب ، جـ)$ عمودي على المستوي هو ل حيث:

$$ل = \frac{| \overleftarrow{ب أ} . \overleftarrow{ن} |}{\| \overleftarrow{ن} \|}$$

طول العمود المرسوم من النقطة أ $(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ على المستوي الذي معادلته:

أ س + ب ص + جـ ع + ء = صفر هو ل حيث:

$$ل = \frac{| أ س_١ + ب ص_١ + جـ ع_١ + ء |}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢}}$$

معادلة المستوي باستخدام الأجزاء المقطوعة من محاور الاحداثيات :

إذا قطع المستوي محاور الاحداثيات في النقط : $(س_١ ، ٠ ، ٠)$ ، $(٠ ، ص_١ ، ٠)$ ، $(٠ ، ٠ ، ع_١)$

فإن معادلة المستوي تكون على الصورة :

$$\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$$